

## DETERMINAÇÃO DA DIMENSÃO FRACTAL DE UMA REDE DE DRENAGEM BRASILEIRA

**Carolina de Souza Araujo, Luísa Santana Marques, Samanta Ferreira Bortoni  
Verônica Silveira de Andrade, Maria Helena Rodrigues Gomes**

Faculdade de Engenharia – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Sanitária e  
Ambiental - 4ª Plataforma Setor de Tecnologia - Rua João Lourenço Kelmer s/n – Bairro Marmelo –  
CEP: 36036-900 - Juiz de Fora – MG – Brasil. Fone: (32) 3229-3419 - Fax: (32) 3229-3401, e-mail:  
[mariahelena.gomes@ufjf.edu.br](mailto:mariahelena.gomes@ufjf.edu.br)

### RESUMO

Tendo por base as características geomorfológicas propostas por Horton, pesquisas têm sido realizadas visando investigar as características fractais das redes de drenagem. O conceito de fractal e de dimensão fractal foi introduzido por Mandelbrot, em 1983 como uma forma alternativa de estudar as estruturas geométricas existentes na natureza as quais não se enquadram na geometria Euclideana. O uso de fractais tem permeado várias áreas do conhecimento científico, dentre elas a hidrologia física na qual se tem pesquisado a fractalidade das redes de drenagem. Baseando-se na verificação da estrutura fractal das redes de drenagem de bacias hidrográficas é possível: (i) relacionar a dimensão fractal às características já existentes, como por exemplo, as razões de Horton; (ii) caracterizar melhor as redes de drenagem através das diversas dimensões fractais; e, (iii) associar a dimensão fractal aos hidrograma unitário geomorfológico e à resposta hidrológica. No Brasil ainda são poucos os estudos publicados sobre o tema, no entanto podendo-se destacar as pesquisas realizadas por GOMES & CHAUDHRY (1997) e KOBAYAMA & JUNIOR (2002). O presente trabalho explora este conceito utilizando uma bacia hidrográfica brasileira. Analisaram-se mapas topográficos da bacia para obtenção dos parâmetros geomorfológicos. A análise fractal foi realizada a partir de método gráfico, como também a relação entre a dimensão fractal e as razões de Horton. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles existentes na literatura e pode-se observar que a bacia hidrográfica estudada pode ser vista como um objeto fractal.

**Palavras-Chaves:** dimensão fractal, bacias hidrográficas, redes de drenagem

## INTRODUÇÃO

O estudo das características geomorfológicas de bacias hidrográficas é fundamental para compreender mecanismos das dinâmicas materiais. Sem as informações geomorfológicas torna-se difícil estabelecer adequados projetos para gerenciamento de recursos naturais. A geomorfologia, tradicionalmente, utiliza técnicas baseadas nas razões de Horton (HORTON, 1945), as quais fornecem grandes contribuições (ZAVOIANU, 1985). Entretanto, uma nova visão tem sido dada aos aspectos geomorfológicos das bacias hidrográficas: a análise fractal.

De acordo com BRIGGS (1992) para entender o significado dos fractais basta observar ao redor, pois segundo ele os fractais estão presentes no dia a dia de todas as pessoas. Os padrões fractais são vistos nas árvores, montanhas, no espalhamento das folhas das arvores de outono nos quintais e jardins, nas folhas de samambaia com sua estrutura ramificada, a linha costeira entalhada pela força do oceano ou pela ação da erosão, pois todos estes exemplos e muitos outros descrevem a rugosidade da natureza e suas transformações dinâmicas.

O conceito de fractais foi difundido por MANDELBROT (1977) diz respeito à geometria irregular muito comumente observada na natureza. Estudos realizados pelo autor sobre similaridade de objetos em escalas diferentes chamaram atenção, pois conseguiu-se descrever formas irregulares, fragmentadas e complexas que são encontradas na natureza. Essa nova geometria foi denominada pelo autor como Geometria Fractal e a partir daí passou a ser aplicada em diversas áreas de estudo, inclusive na hidrologia.

Após a introdução do conceito de dimensão fractal na hidrologia, várias pesquisas foram realizadas, com base nos modelos de elevação digital envolvendo bacias hidrográficas com características distintas (topografia, geomorfologia e litologia). No início das pesquisas sobre a fractalidade das redes de drenagem, três métodos foram investigados por TARBOTON et al. (1988) e estes forneceram resultados que permitiram a primeira estimativa da dimensão fractal (GOMES, 1997). A visão das redes de drenagem como objetos fractais tem levado a importantes resultados sobre a forma de estruturação dos canais fluviais e interpretação das propriedades de escalonamento no que concernem vários índices morfológicos de bacias e similaridade entre redes de drenagem aparentemente diferentes (SILVEIRA, 2006).

## CLASSIFICAÇÃO DAS REDES DE DRENAGEM

O estudo quantitativo das redes de canais teve como precursor HORTON (1945) que em seus estudos classificou os canais por ordem. Posteriormente, STRAHLER (1952) modificou essa classificação tornando-a mais simples e oferecendo maior liberdade nas decisões subjetivas. No sistema de ordenação de canais modificado por STRAHLER (1952) os canais de primeira ordem são aqueles com origem nas fontes; quando dois canais de ordem  $x_i$  se unem, formam um canal de ordem  $x_{i+1}$ ; quando dois canais de ordens diferentes se unem, o segmento de canal imediatamente a jusante tem a ordem do canal de ordem maior. A ordem da rede de canais ou bacia de drenagem corresponde à ordem mais alta do canal que a constitui. A Figura 1 mostra uma rede de drenagem segundo a classificação de STRAHLER (1952).

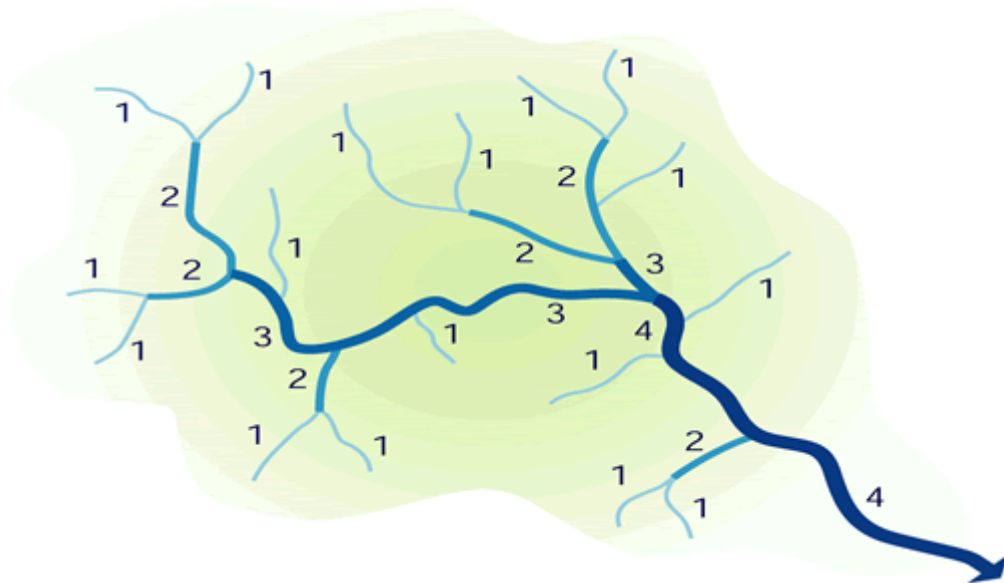


Figura 1 – Exemplo de ordem dos cursos d'água segundo STRAHLER (1957)  
 Imagem cortesia da FISRWG (fonte: [http://www.fgmorph.com/fg\\_4\\_8.php](http://www.fgmorph.com/fg_4_8.php))

Além da classificação das redes de drenagem, HORTON (1945) deduziu a Lei do Número de Canais e a Lei do Comprimento de Canais, que respectivamente, representam a estrutura geológica e a estrutura geométrica da rede, e posteriormente, SCHUMM (1956) apud SMART (1972) continuando o trabalho de Horton, propôs a Lei da Área de Drenagem e são representadas pelas equações (1), (2) e (3):

a) Lei do Número de Canais

$$R_B \cong \frac{N_{x_i-1}}{N_{x_i}} \quad (1)$$

b) Lei do Comprimento de Canais

$$R_L \cong \frac{\bar{L}_{x_i}}{\bar{L}_{x_i-1}} \quad (2)$$

c) Lei da Área de Drenagem

$$R_A \cong \frac{\bar{A}_{x_i}}{\bar{A}_{x_i-1}} \quad (3)$$

Onde:  $R_B$  é a Razão de Bifurcação e  $R_L$  é a Razão de Comprimento de Horton;  $R_A$  é a Razão de Área;  $N_{x_i}$  é o número de canais e ordem  $x_i$ ;  $\bar{L}_{x_i}$  é o comprimento médio do  $i$ -ésimo canal de ordem  $x_i$  e  $\bar{A}_{x_i}$  é a área média total da bacia. Com  $x_i = 2, 3, \dots, \Omega$  e sendo  $\Omega$  a ordem do canal de ordem mais elevada que fornece a ordem da bacia de drenagem.

Apesar de  $R_B$  e  $R_L$  não serem as mesmas para diferentes ordens, para a obtenção de um valor constante deve-se plotar em um diagrama, denominado Diagrama de Horton,  $N_{x_i}$  e  $\bar{L}_{x_i}$  em função de  $x_i$  de onde os valores de  $R_B$  e  $R_L$  podem ser obtidos,  $R_A$  também pode ser plotada de maneira similar. Segundo STRAHLER (1952),  $R_B$  assume valores entre 3 e 5;  $R_L$ , entre 1,5 e 3,5 e  $R_A$  entre 3 e 6.

## DIMENSÃO FRACTAL

Define-se dimensão fractal ou dimensão Hausdorff como a medida do grau de irregularidades de um objeto em diferentes escalas. Segundo MANDELROT (1977), a dimensão fractal é uma característica básica de objetos fractais podendo se compreendida da seguinte forma: *assume-se que para cobrir certo objeto no espaço n-dimensional, requerem-se  $N_e$  esferas n-dimensionais de diâmetro  $d$* .  $N_e$  e  $d$  são relacionados através da equação (4):

$$N_e(d) \approx d^{-D} \quad (4)$$

Um objeto fractal possui dimensão maior do que sua dimensão clássica. Os fractais são formas geométricas incapazes de serem classificadas pela geometria Euclideana por possuírem três características fundamentais que os distinguem de outras formas: auto-semelhança em diferentes níveis de escala, dimensão fractal e sua complexidade infinita (GULICK, 1992).

Ao analisar o mundo pela visão euclideana, segundo SILVEIRA (2006), o observador movimenta-se em saltos descontínuos da linha (unidimensional), para o quadrado (bi-dimensional) e para o cubo (tri-dimensional). Entretanto, quando o observador passa a analisar o mundo do ponto de vista de sua fractalidade, passa a perceber que as irregularidades geram um aumento na dimensão. Esta dimensão passa a ser fracionária e é importante para a descrição de estruturas espaciais. A dimensão de uma curva fractal é um número que aumenta à medida que a escala diminui possibilitando a quantificação da complexidade ou irregularidade de um objeto fractal, mas não sua forma. Para a autora, um objeto que possua dimensão fractal menor é menos complexo do que aquele que tem dimensão fractal maior.

Para CHRISTOFOLETTI & CHRISTOFOLETTI (1994) apud SILVEIRA (2006) a dimensão fractal pode ser enquadrada em função dos seus valores de escalonamento de maneira generalizada: (i) valores entre 0 e 0,99: neste intervalo encontram-se as estruturas com base em pontos como, por exemplo, o fractal de uma série temporal de dados sobre a precipitação em determinado lugar; (ii) valores fractais entre 1,0 e 1,99 caracterizam as estruturas espaciais de lineamentos, no caso curvas irregulares, como as tortuosidades e as sinuosidades das linhas costeiras e os meandros dos cursos fluviais; (iii) valores entre 2,0 e 2,99 caracterizam as estruturas espaciais de representação bidimensional que uma superfície irregular possui tais como a análise do formato de bacias hidrográficas e a modelagem digital do terreno; (iv) valores de 3,0 e 3,99: correspondem às estruturas espaciais de representação volumétrica de uma categoria de ocorrência no interior de outro conjunto volumétrico e pode-se citar como exemplo, sua aplicação para o cálculo de reservas em jazidas minerais em determinada unidade espacial ou para determinar o volume total de nuvens em uma unidade volumétrica (local ou regional) da atmosfera.

## Dimensão Fractal e as Leis de Horton

Com a introdução da visão fractal, vários foram os estudos que tentaram relacionar a dimensão fractal com parâmetros que caracterizam as bacias hidrográficas. Dentre esses estudos pode-se citar o estudo de LA BARBERA & ROSSO (1989) que utilizaram a dimensão fractal para analisar a dimensão das redes de canais através de padrões similares dentro de uma classe de escalas. Os autores avaliaram algumas restrições como geologia, clima e hidrologia das bacias hidrográficas em estudo com o intuito compreender a teoria quantitativa das redes de canais e assim poder estabelecer uma relação entre a dimensão fractal de uma rede de drenagem e as razões de Horton. Foi desenvolvida pelos autores expressões para comprimento de canais de diversas ordens e sua dependência sobre uma escala linear característica. Os autores interpretaram como sendo o comprimento médio dos canais de 1ª ordem, uma unidade de medida  $e$ , que além das variações causadas pela unidade de medida, as redes de canais variam também, pela malha utilizada, quando a densidade de drenagem é obtida de fotos aéreas, mapas e modelos de elevação digital. A dimensão fractal foi de acordo com LA BARBERA & ROSSO (1989), caracterizada pela propriedade de escalas das redes de canais associadas à mudança no comprimento dos canais após mudança de escala. A dimensão fractal  $D$  tem valor unitário para dimensão euclidiana da linha no plano e valor igual a 2 para áreas de padrão espacial. Segundo ROSSO et al. (1991) as leis de Horton caracterizam relações espaciais de escalonamento geométrico e são independentes da ordem ou resolução ao qual a rede está sendo observada tendendo a auto-similaridade do sistema de canais da bacia podendo ser utilizadas para determinação da dimensão fractal de canais individuais e rede de canais. Para determinação da dimensão fractal, os autores consideraram que as leis de número de canais e comprimento de canais mantêm-se invariáveis para diversas escalas. As equações (5) e (6) expressam a dimensão fractal em função das razões de Horton:

$$D = \frac{\log R_B}{\log R_L}, \quad R_B > R_L \quad (5)$$

$$D = 1, \quad R_B \leq R_L \quad (6)$$

LA BARBERA & ROSSO (1987) apud GOMES (1997) analisaram um grande número de observações empíricas dos valores de  $R_B$  e  $R_L$  obtidos de redes de drenagem de diferentes origens e localizações geográficas. Os valores encontrados foram inseridos em um gráfico  $R_L \times R_B$  e, foi observado pelos autores que as redes de canais naturais apresentam dimensões fractais variado, com valores, geralmente, entre 1,5 e 2,0.

### Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais

TARBOTON et al. (1988) propuseram três métodos para determinação da dimensão fractal de redes de drenagem: método de Richardson, método de *box-counting* e método da distribuição da probabilidade de excedência do comprimento de canais. Mas cabe ressaltar que outros métodos também foram propostos e avaliados.

Neste trabalho apresentar-se-a o cálculo da dimensão fractal pelo método da distribuição da probabilidade de excedência do comprimento de canais. TARBOTON et al. (1988) observaram que

a probabilidade de ocorrência de  $r$  é proporcional a  $r^{-D}$ , denotando uma distribuição hiperbólica, que satisfazem a propriedade de auto-similaridade, escrita como:

$$p = \text{Prob} [\text{comprimento} > l] \approx l^{-D} \quad (7)$$

Onde  $D$  é a dimensão fractal e  $l$  é o comprimento dos canais.

A probabilidade de excedência em várias bacias é dada por:

$$P = \frac{\bar{m}}{n + 1} \quad (8)$$

Onde  $\bar{m}$  é a ordem de um canal qualquer em uma lista ordenada do canal mais longo para o mais curto e  $n$  é o número total de canais da rede de drenagem. A partir da análise do gráfico  $P$  em função de  $l$  obtém-se a dimensão fractal  $D$ .

TARBOTON et al. (1988) determinaram a inclinação da reta como próxima de 2, o que sugere a dimensão fractal  $D \cong 2$  e tornando válida a hipótese das redes de canais possuírem um padrão de ramificação que cobre todo o espaço. O valor encontrado pelos autores para a dimensão fractal sugere a natureza fractal das redes de canais e que esta seria próxima de 2. Valor este consistente com a geomorfologia fluvial clássica e o modelo de população topologicamente aleatória, o que pode ser significativamente importante para a hidrologia quantitativa.

## ÁREA DE ESTUDO

A sub-bacia do Ribeirão de Marmelo localiza-se no município de Juiz de Fora na Zona da Mata Mineira. O município divide-se em dois grandes domínios geológicos: Gnaiss Piedade e o Complexo Juiz de Fora os quais possuem grande extensão e são formados por rochas metamórficas, coerentes, duras e resistentes. Estas rochas destacam-se por serem muito antigas e terem sido sujeitas a vários processos de transformação geológicos. A bacia em estudo se encontrada localizada na região do Complexo Juiz de Fora (PDJF, 1996).

O Complexo Juiz de Fora é formado por rochas mais antigas que foram submetidas a rigorosas condições de temperatura e pressão, oriundo de fortes deformações e recristalizações, formando tipos litológicos conhecidos como Granulitos. O Complexo estende-se continuamente em toda porção do perímetro urbano onde estabelece uma relevante falha geológica regional entre este e as rochas do Gnaiss Piedade. Esta falha constitui o front principal que durante a sua rigorosa formação gerou falhas de menor porte como, por exemplo, a que acompanha o vale do Ribeirão Marmelo responsável pela formação do vale do Rio Paraibuna, o principal rio do município (PDJF, 1996). Quanto aos aspectos geomorfológicos o município está localizado na Unidade Serrana da Zona da Mata pertencente à região Mantiqueira Setentrional. É uma região montanhosa com altitudes próximas a 1000m nos pontos mais elevados e no fundo dos vales pode chegar a 670m. As áreas do Complexo Juiz de Fora possuem relevo mais acidentado, em especial, nas zonas de distribuição dos Charnockitos e Kinsigitos e sua paisagem foi trabalhada pelos agentes erosivos produzindo um aprofundamento do nível de base do Rio Paraibuna enquanto manteve soerguidos os

fundos dos vales de seus afluentes, sustentados por assoalhos rochosos formando “vales suspensos” (PDJF, 1996).

## RESULTADOS

Com os dados obtidos dos mapas do IBGE – número de canais e comprimento de canais – foram calculadas as Razões de Horton,  $R_B$  e  $R_L$ , respectivamente a razão ou lei do número de canais e dos comprimentos de canais. Os valores encontrados encontram-se reunidos na Tabela 1.

Dos métodos propostos por TARBOTON et al. (1988), escolheu-se, para determinação da dimensão fractal, o método da probabilidade da excedência de comprimentos de canais e a determinação via Razões de Horton. A determinação da dimensão fractal  $D$  via Razões de Horton foi realizada utilizando-se as equações (5) e (6) e o gráfico que relaciona  $R_L$  em função de  $R_B$  (LA BARBERA & ROSSO, 1989).

A dimensão fractal calculada pela equação (5) provem de uma relação entre a razão de bifurcação  $R_B$  e a razão de comprimento  $R_L$ . Este valor é coerente com os valores propostos na literatura segundo os estudos de LA BARBERA & ROSSO (1989). Segundo estes autores, o valor menor que 2 para a dimensão fractal ocorre em função das características heterogêneas da bacia hidrográfica, o que se pode confirmar para a bacia em estudo.

Tabela 1: Dados e valores das Razões de Horton da Bacia do Ribeirão Marmelo

Ordem dos Canais	Nº de Canais	Comprimento (m)	Comprimento Médio (m)	Razões de Horton
1	102	951600	9329,412	<b>Razão do Comp. de Canais <math>R_L</math></b> 2,80
2	22	352800	16036,36	
3	5	187200	37440,00	<b>Razão do Número de Canais - <math>R_B</math></b> 4,68
4	1	163200	163200,00	

A Figura 2 apresenta a relação entre  $R_B$  e  $R_L$  de várias bacias hidrográficas de diferentes origens e localizações geográficas. Observa-se, também, que as redes de canais naturais possuem dimensão fractal  $D$ , geralmente entre 1,5 e 2,0. Tem-se, também, que a dimensão fractal é igual a 2 para  $R_L = R_B^{1/2}$ . A curva tracejada representa a relação entre razão de comprimento  $R_L$  e a razão de bifurcação  $R_B$  como sendo  $R_L \cong R_B / 2$ . É possível verificar que a dimensão fractal não tende a um valor constante, mas seu valor está confinado entre 1,5 e 2,0. Pode-se observar na Figura 2 que as bacias analisadas por GOMES (1997) e a Bacia do Ribeirão Marmelo enquadram-se dentro da faixa de valores propostos por LA BARBERA & ROSSO (1989). Inserindo-se os valores de  $R_B$  e  $R_L$  no gráfico da Figura 2 a dimensão fractal para a Bacia do Ribeirão Marmelo possui valor igual a 1,5. Isto se deve ao fato de que restrições topográficas, geológicas e hidrológicas podem reduzir o grau de fractabilidade das redes sendo este o caso da bacia em estudo que apresenta sua formação geológica, geomorfológica e topográfica heterogêneas em sua extensão.

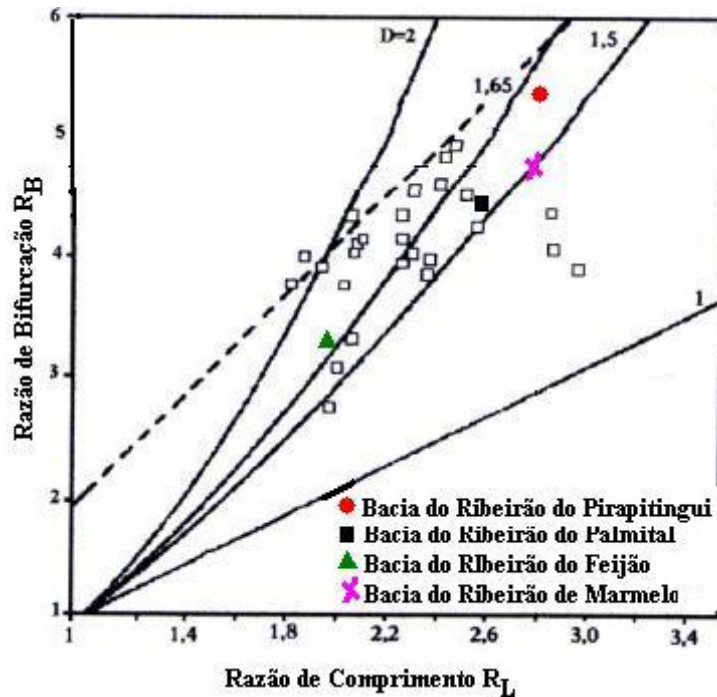


Figura 2 - Análise dos valores de  $R_B$  e  $R_L$

Outro modo de estimar a dimensão fractal consiste na utilização do gráfico di-log (Figura 3) que relaciona a probabilidade de excedência e o comprimento dos canais da rede de drenagem. A dimensão fractal é o coeficiente angular da reta ajustada a estes dados na parte referente aos grandes comprimentos. O valor encontrado para a dimensão fractal  $D$  igual a 1,86. Observa-se que o valor de  $D$  para a Bacia do Ribeirão Marmelo é menor que 2 o que significa que a rede de drenagem possui um padrão de ramificação que preenche toda a bacia de drenagem.

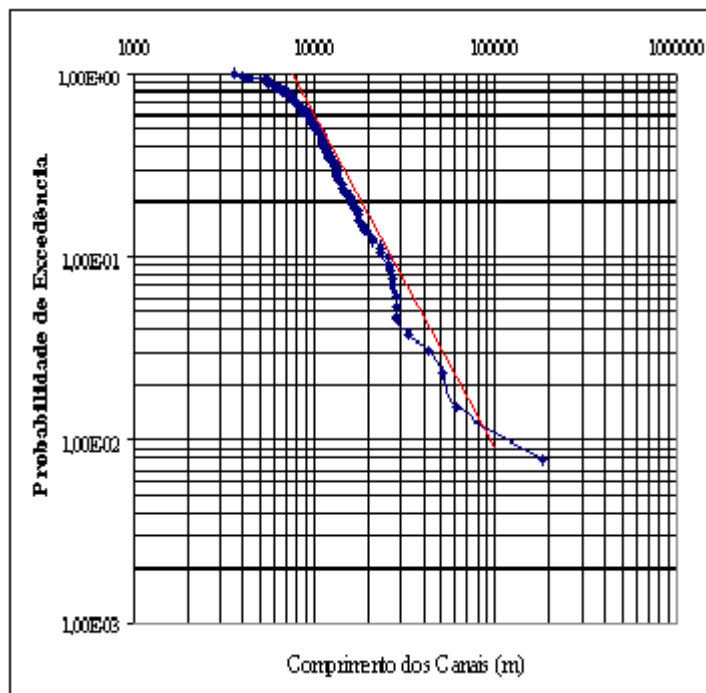


Figura 3 - Dimensão fractal obtida pelo Método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão Marmelo

Na Tabela 2 estão reunidos os valores da dimensão fractal para os três métodos aqui investigados e os resultados obtidos para a Bacia do Ribeirão Marmelo são comparados com aqueles encontrados por GOMES (1997). Observa-se que o valor encontrado para a dimensão D para a bacia em estudo é pertinente com aqueles encontrados por GOMES (1997), LA BARBERA & ROSSO (1989) e TARBOTON et al. (1988). Não se pode ainda avaliar qual método é mais preciso, mas pode-se sim afirmar que as redes de drenagem possuem um padrão fractal e que podem ser vistas como objetos fractais.

Tabela 2: Dimensão Fractal determinada através das Razões de Horton e pelo Método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais

Bacias Hidrográficas	Dimensão Fractal		
	Método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais	Determinação através das Razões de Horton	Através do gráfico $R_L$ versus $R_B$
Ribeirão Marmelo	1,86	1,50	1,50
Ribeirão do Palmital*	1,97	1,56	1,53
Ribeirão Pirapitingui*	1,95	1,71	1,60
Ribeirão do Feijão*	1,83	1,93	1,70

\* Fonte: GOMES (1997)

## CONCLUSÃO

Das análises realizadas pode-se concluir que:

- (i) O valor da dimensão fractal próxima de 2, quando utilizado o método da distribuição de excedência do comprimento de canais para a Bacia do Ribeirão Martelo, caracteriza uma rede de drenagem que possui um padrão de ramificação que cobre toda a área de drenagem;
- (ii) Os resultados encontrados, utilizando a equação (5) e o gráfico  $R_L$  em função de  $R_B$ , são coerentes com os resultados encontrados por LA BARBERA & ROSSO (1989), ou seja, as redes de drenagem naturais possuem dimensão fractal na faixa entre 1,5 e 2,0; e que a redução no valor da dimensão fractal se deve as características heterogêneas da bacia;
- (iii) Os resultados obtidos corroboram a afirmação de TARBOTON et al. (1988) de que as redes de canais podem ser vistas como objetos fractais.
- (iv) Cabe ressaltar que ainda não se pode afirmar com precisão qual metodologia oferece resultados mais precisos na determinação da dimensão fractal, entretanto pode-se observar que todos os métodos usados caracterizam as redes de drenagem como objetos fractais.

## AGRADECIMENTO

As autoras agradecem ao Núcleo de Análise Geo-Ambiental do Departamento de Transporte da Faculdade de Engenharia da UFJF pelos mapas e informações fornecidos para a elaboração deste trabalho. E à Pró-Reitoria de Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora pelo apoio concedido.

## BIBLIOGRAFIA

Briggs, J. *Fractals: The Patterns of Chaos*. New York: Touchstone, 1992.

FISRWG. Exemplo de ordem dos cursos d'água segundo STRAHLER (1957) - [http://www.fgmorph.com/fg\\_4\\_8.php](http://www.fgmorph.com/fg_4_8.php)

Gomes, M. H. R. *Análise Fractal de Redes de Canais de Bacias hidrográficas na Escala 1:50.000*. São Paulo, 1997. 83f. Dissertação de Mestrado Escola de Engenharia de São Carlos. USP.

Gomes, M. H. R.; Chaudhry, F. H. “*Análise Fractal de Redes de Drenagem de Bacias Hidrográficas*”. XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos. USP. p. 20-24, 1997

Gulick, D., “*Encounters with Chaos*”, McGraw-Hill International Editions – Mathematics and Statistics Series, 1992.

Horton, R. E. “*Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology*”. Bulletin of the Geological Society of America. v. 56, p. 275-370, 1945

Kobiyama, M; Bueno Junior, J. “*Multifractal Characteristics of Drainage Network of Marumbi River Watershed, Paraná State*”. In: XXXI Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola – CONBEA- 2002, Salvador/BA. Anais

LA BARBERA, P.; ROSSO, R. “*On Fractal Dimension of Stream Networks*”. Water Resources Research, Washington. v. 25, n. 4, p.753-741, 1989.

Mandelbrot, B. B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman and Company. New York, 1977.

Prefeitura Municipal de Juiz de Fora. *Plano Diretor de Juiz de Fora*. Diagnóstico, v.1. Instituto de Pesquisa e Planejamento da Prefeitura Municipal de Juiz de Fora, 1996.

ROSSO, R.; BACCHI, B.; BARBERA, P. *Fractal Relation of Mainstream Length to Catchment Area in River Networks*. Water Resources Research, v. 27, n. 3, 1991. p. 381-387.

Silveira, N. F. Q. *Análise fractal de bacias hidrográficas de região de encosta e região de planalto com base em cartas topográficas e em fotografias aéreas*. Florianópolis – Santa Catarina, 2006. 191f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina.

Smart, J. S. “*Channel networks*”. Advances in Hydrosciense. Washington. v. 8, 1972. p. 305-346

Strahler, A. N. “*Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography.*” Bulletin of the Geological Society of America. v. 63, 1952, p.1117-1121.

Tarboton, D. G.; Bras, R. L.; Iturbe, I. R. “*The Fractal Nature of Networks*”. Water Resources. Research. v. 24, n. 8, 1988. p. 1317-1322.

Zăvoianu, I. *Morphometry of drainage basins*. New York: Elsevier Science Publisher, 1985